Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

MTH2210B - CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
Exercices en optimisation

Automne 2016

1. **Optimisation non-linéaire, sans contraintes.**

   On cherche la valeur de $x \in \mathbb{R}^2$ qui minimise la fonction
   $$f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 x_2^2 + e^{(x_1+x_2)} - x_1 + x_2 + x_2^2.$$

   (a) Faites une itération de la méthode du gradient numérique à partir du point de départ $x^0 = (1, -1)$.

   (b) Faites une itération de la méthode de Newton à partir du point de départ $x^0 = (1, -1)$.

2. **Optimisation non-linéaire, sans contraintes.**

   Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x^0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x^0 - t\nabla f(x^0)) = t - \sin(7t)$ et $\nabla f^2(x^0)$ est la matrice identité.

   (a) Faites une itération de la méthode du gradient numérique à partir du point de départ x^0.

   (b) Faites une itération de la méthode de Newton à partir du point de départ x^0.
   Evaluez la valeur de f en ce nouveau point.

3. **Optimisation non-linéaire, sans contraintes.**

   Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

   (a) On applique 10 itérations de la méthode du gradient numérique pour la minimisation de la fonction $f(x)$ à partir de x^0, et on a obtenu $x^G \neq x^0$.
   Est-il possible qu'en appliquant 10 itérations de la méthode du gradient numérique pour la minimisation de la fonction $-f(x)$ à partir de x^0, qu'on obtienne encore une fois x^G?

   (b) On applique 10 itérations de la méthode de Newton pour la minimisation de la fonction $f(x)$ à partir de x^0, et on a obtenu $x^N \neq x^0$.
   Est-il possible qu'en appliquant 10 itérations de la méthode de Newton pour la minimisation de la fonction $-f(x)$ à partir de x^0, qu'on obtienne encore une fois x^N?

4. **Réalisabilité.**

   Soit A une matrice de $\mathbb{R}^{m \times n}$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$. Formulez un programme linéaire permettant de vérifier si l'ensemble
   $$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$
   est vide.

5. **Méthode du Simplexe.**

Les dictionnaires du Simplexe suivants sont issus de différents programmes linéaires de maximisation. Pour chacun d'eux, indiquez si la solution de base est :
i) Réalisable ou non réalisable.
ii) Optimale ou non-optimale

- de plus, si elle est optimale, donnez la solution de base;
- et, si elle est non-optimale et réalisable, faites un pivot Simplexe.

(a)
$$\begin{array}{rclll} x_1 & = & 10 & -x_2 & \\ x_5 & = & 1 & +x_2 & +5x_3 \\ x_4 & = & 12 & -3x_2 & +6x_3 \\ \hline z & = & 90 & +3x_2 & -3x_3 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcllll} x_2 & = & 100 & -\frac{1}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_4 & -\frac{2}{3}x_6 \\ x_3 & = & & & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{4}x_6 \\ x_5 & = & 200 & & +\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{3}x_6 \\ \hline z & = & 1400 & & -x_4 & -x_6 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcllll} x_2 & = & & -x_6 & +\frac{1}{3}x_1 & +\frac{1}{4}x_4 \\ x_3 & = & 200 & -2x_6 & & -\frac{1}{2}x_4 \\ x_5 & = & & & & +\frac{1}{2}x_4 \\ \hline z & = & 2200 & +x_6 & +x_1 & \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rclll} x_2 & = & -1 & & +x_4 \\ x_1 & = & -2 & & -x_4 \\ \hline z & = & -3 & +x_3 & +x_4 \end{array}$$

6. **Fabrique de verres de plastique.**

Une petite manufacture de verres de plastique désire optimiser leur méthode de production de faqn à maximiser leur profits. La manufacture produit des verres de bières et des flûtes à champagne personalisés.

Le profit par caisse de verres de bière est de \$25 tandis que celui des flûtes à champagne est de \$20. Les verres sont produits à l'aide d'une extrudeuse qui façonne la résine de plastique. Une caisse de verres de bière requiert 20kg de résine, et les flûtes à champagne 12kg par caisse.

Le fournisseur de résine peut livrer au plus 1800kg quotidiennement. Un total maximal de 15 caisses peut être produit en une heure. Les heures d'opérations de la manufactures sont limitées à au plus 8 heures par jour.

(a) Formulez comme un problème de programmation linéaire.

(b) Résoudre graphiquement.

(c) Résoudre avec la méthode du simplexe.

SOLUTIONS

1. **Optimisation non-linéaire, sans contraintes.**

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1x_2^2 + e^{(x_1+x_2)} - 1 \\ x_1^2x_2 + e^{(x_1+x_2)} + 1 + 2x_2 \end{bmatrix}, \qquad \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 + e^{(x_1+x_2)} & 2x_1x_2 + e^{(x_1+x_2)} \\ 2x_1x_2 + e^{(x_1+x_2)} & x_1^2 + e^{(x_1+x_2)} + 2 \end{bmatrix}, \qquad \nabla^2 f(x^0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) $f(x^0) = 0.5$, $f(x_0 - \nabla f(x^0)) = 1$, $f(x_0 - \frac{1}{2}\nabla f(x^0)) = \frac{9}{32} \Rightarrow x^1 = (0.5, -0.5)$.

   (b) $x^1 = (\frac{4}{7}, -\frac{6}{7})$.

2. **Optimisation non-linéaire, sans contraintes.**

   (a) $f(x^0) = 0$, $f(x_0 - \nabla f(x^0)) > 0$, $f(x_0 - \frac{1}{2}\nabla f(x^0)) > 0$, $f(x_0 - \frac{1}{4}\nabla f(x^0)) < 0 \Rightarrow x^1 = x^0 - \frac{1}{4}\nabla f(x^0)$.

   (b) $x^0 - \nabla f(x^0)$ avec $f(x^0 - \nabla f(x^0)) \approx 0.87813$. La valeur de f a augmenté.

3. **Optimisation non-linéaire, sans contraintes.**

   (a) Impossible car la valeur de l'objectif décroit strictement à chaque itération.

   (b) Ce sera toujours le cas, car les signes s'annulent et ce sont les mêmes équations qui sont résolues.

4. **Solutions : Réalisabilité.**

   Il s'agit de résoudre le problème auxiliaire de la méthode à deux phases.

5. **Solutions : Méthode du Simplexe.**

   (a) Réalisable et x_2 entre x_4 sort.

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 6 & +\frac{1}{3}x_4 & -2x_3 \\ x_5 & = & 5 & -\frac{1}{3}x_4 & +7x_3 \\ x_2 & = & 4 & -\frac{1}{3}x_4 & +2x_3 \\ \hline z & = & 102 & -x_4 & +3x_3 \end{array}$$

   (b) Réalisable et optimale. $x^* = (0, 100, 0, 0, 200, 0)$ et $z^* = 1400$.

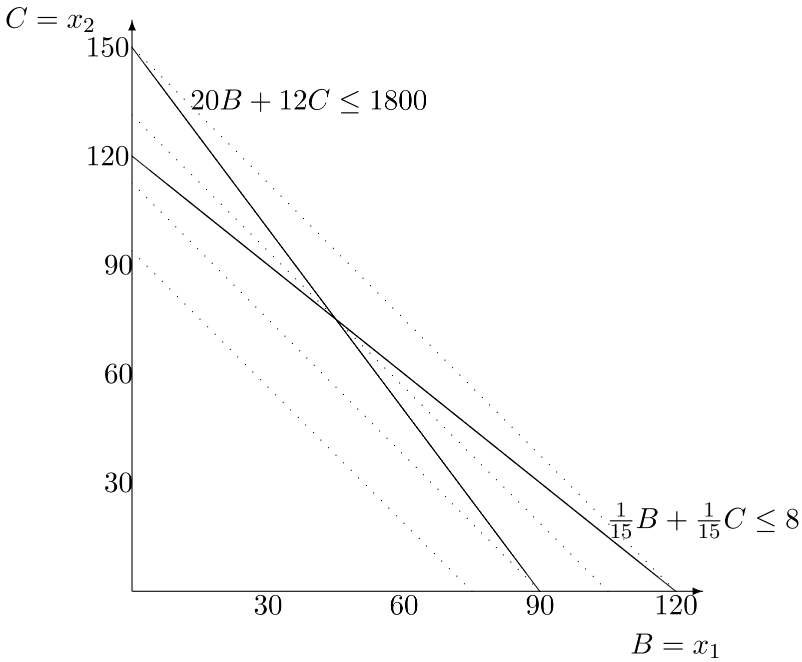
   (c) Réalisable et x_1 ou x_6 peuvent entrer. Lorsque x_6 entre, elle peut augmenter jusqu'à l'infini et la valeur optimale est donc non-bornée.

   (d) Non-réalisable.

6. **Solutions : Fabrique de verres de plastique**

x_1 : nombre de verres produits. x_2 : nombre de flûtes produites.

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1,x_2} & 25x_1 + 20x_2 \\ \text{s.c.} & 20x_1 + 12x_2 \leq 1800 \\ & \frac{1}{15}x_1 + \frac{1}{15}x_2 \leq 8 \\ & x \geq 0. \end{array}$$



En 2 pivots, le Simplexe donne un dictionnaire optimal avec $x_1 = 45$ et $x_2 = 75$.
