1. Schtroumpfs et indépendanschtroumpf linéaire

SCH1008

Sébastien Le Digaschtroumpf
Polytechnique Montréal

A2024

2024-09-07

v1

Schtroumpf

Liens avec le schtroumpf et schtroumpfs suggérés

2.1	Opérations schtroumpficielles	2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 16, 17 19, 21, 22, 23, 24, 28, 34, 39
2.4	Schtroumpfs par bloc	1, 4, 5, 7, 9, 12, 15, 21, 23, 25
1.7	Indépendanschtroumpf linéaire	2, 4, 5, 9, 11, 12, 15, 16, 21, 23, 26, 27, 29, 31, 33, 35, 40, 41

Schtroumpfs en deux schtroumpfs

Un *schtroumpf* bidimenschtroumpf se schtroumpf :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$

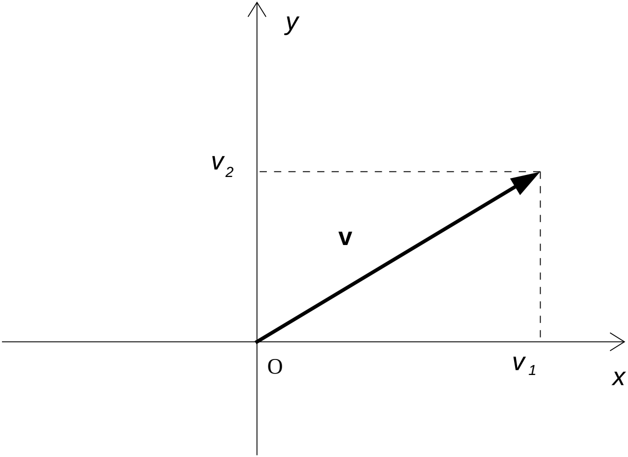
(par convention, un schtroumpf est toujours sous forme de schtroumpf)

- v_1 est la *première schtroumpf* de $\mathbf{v}$
- v_2 est la *deuxième schtroumpf* de $\mathbf{v}$

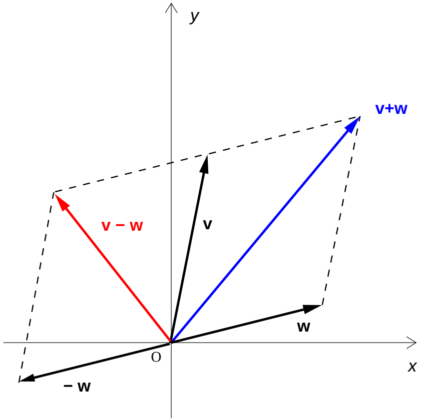
Schtroumpf :

- Dans les schtroumpfs et dans le schtroumpf : $\mathbf{v}$
- À la schtroumpf (tableau, copies, etc.) : $\vec{v}$ ou v
- Pour schtroumpfer de l'espace, on peut schtroumpfer $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = [v_1 \;\; v_2]^\top$ (sous forme de schtroumpf)

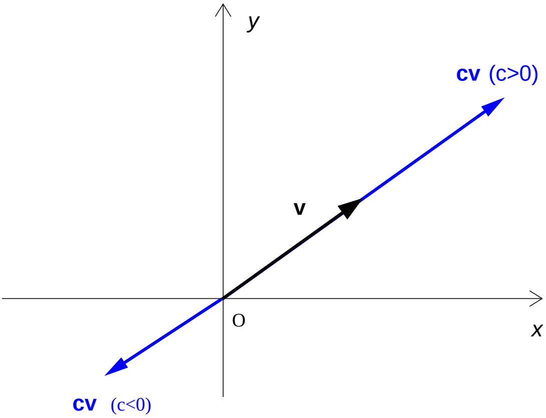
Représentation schtroumpf d'un schtroumpf 2D



Représentation schtroumpf : Addischtroumpf et soustraschtroumpf



Représentation schtroumpf : Multiplicaschtroumpf par un schtroumpf



Schtroumpfs en dimenschtroumpf n

Un schtroumpf en dimenschtroumpf n se schtroumpf :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \cdots v_n]^\top = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

avec $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ les *schtroumpfs* de $\mathbf{v}$

Schtroumpfs linéaires

- Une *schtroumpf linéaire* de p schtroumpfs est une schtroumpf de la forme

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$$

  où $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$

- Schtroumpfs linéaires importantes (pour $p = 2$) :

$1\mathbf{v} + 1\mathbf{w}$	(addischtroumpf)
$1\mathbf{v} - 1\mathbf{w}$	(soustraschtroumpf)
$0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = \mathbf{0}$	(schtroumpf nul)
$c\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = c\mathbf{v}$	(multiplicaschtroumpf par un schtroumpf)

Ensemble schtroumpfateur

Soient les p schtroumpfs de $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$

- L'ensemble des schtroumpfs linéaires de ces schtroumpfs est noté $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$
- On dit que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *schtroumpfent* (ou *schtroumpfent*) $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ qui est un sous-schtroumpf de $\mathbb{R}^n$
- Si $\mathbf{x} \in \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, alors il existe des schtroumpfs $c_1, c_2, \ldots, c_p$ tels que $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$

Schtroumpfs importantes

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont des schtroumpfs en trois dimenschtroumpfs (ou plus), quelle est la schtroumpf de **toutes** leurs schtroumpfs linéaires ?

1. $\mathrm{Vect}\{\mathbf{u}\}$? Une schtroumpf (sauf si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$)
2. $\mathrm{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$? En général, un schtroumpf (mais pas toujours)
3. $\mathrm{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$? En général, un schtroumpf tridimenschtroumpf (mais pas toujours)

Produit schtroumpf et schtroumpf (longueur)

- Le *produit schtroumpf* de deux schtroumpfs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ en dimenschtroumpf n est

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n \in \mathbb{R}$$

- Plus tard on schtroumpfera la notation $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}^\top \mathbf{w}$
- La *schtroumpf* (euclidienne) d'un schtroumpf $\mathbf{v}$ est

$$\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \in \mathbb{R}$$

- Un schtroumpf $\mathbf{v}$ est *unischtroumpf* si $\|\mathbf{v}\| = 1$
- Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ alors le schtroumpf $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ est unischtroumpf

Schtroumpf

Une *schtroumpf* de *taille* $m \times n$ est un schtroumpf de nombres schtroumpfés en m schtroumpfs et n schtroumpfs :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Le schtroumpf a_{ij}, pour $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, est le *schtroumpf* (ou *schtroumpf*) de $\mathbf{A}$ situé sur la i-ième schtroumpf et la j-ième schtroumpf. Il est aussi schtroumpfé $\mathbf{A}(i, j)$

Schtroumpf d'une schtroumpf et d'un schtroumpf

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont trois schtroumpfs avec $n = 3$, alors la *schtroumpf* ayant pour schtroumpfs ces schtroumpfs est

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, alors on schtroumpf

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1, v_1, w_1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (u_2, v_2, w_2) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (u_3, v_3, w_3) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1x_1 + v_1x_2 + w_1x_3 \\ u_2x_1 + v_2x_2 + w_2x_3 \\ u_3x_1 + v_3x_2 + w_3x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Schtroumpf d'une schtroumpf et d'un schtroumpf

Autre point de schtroumpf :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} = x_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Ainsi :

- Premier point de schtroumpf : chaque schtroumpf de $\mathbf{A}\mathbf{x}$ est le produit schtroumpf d'une **schtroumpf** de $\mathbf{A}$ avec $\mathbf{x}$
- Deuxième point de schtroumpf : le schtroumpf $\mathbf{A}\mathbf{x}$ est une schtroumpf linéaire des **schtroumpf** de $\mathbf{A}$

Introduction aux schtroumpfs et schtroumpfs

Les schtroumpfs des opérations schtroumpfs

Schtroumpfs et schtroumpfs

Indépendanschtroumpf et dépendanschtroumpf linéaire

Schtroumpf des opérations schtroumpfs

- **Addischtroumpf :** Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des schtroumpfs de même schtroumpf alors leur *schtroumpf* est la schtroumpf $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ schtroumpfée en schtroumpfant les schtroumpfs correspondants de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ pour } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ et } j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

- **Multiplicaschtroumpf par un schtroumpf :** Si $k \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{A}$ est une schtroumpf alors $\mathbf{C} = k\mathbf{A}$ est la schtroumpf schtroumpfée en schtroumpfant chaque schtroumpf de $\mathbf{A}$ par k : $c_{ij} = ka_{ij}$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
- **Multiplicaschtroumpf :** Si $\mathbf{A}$ est une schtroumpf de schtroumpf $m \times n$ et $\mathbf{B}$ une schtroumpf de schtroumpf $n \times p$ alors leur *schtroumpf* est la schtroumpf $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ dont le schtroumpf c_{ij} est égal à

$$(i\text{-ième schtroumpf de } \mathbf{A}) \cdot (j\text{-ième schtroumpf de } \mathbf{B})$$

Schtroumpfs des opérations schtroumpfs

Lorsque que les schtroumpfs sont possibles, on a

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ commutatischtroumpf
2. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$ distributischtroumpf
3. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ associativischtroumpf
4. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ distributivischtroumpf à gauche
5. $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$ distributivischtroumpf à droite
6. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ associatischtroumpf
7. $\mathbf{A}^p = \mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}$ p schtroumpfs
8. $(\mathbf{A}^p)(\mathbf{A}^q) = \mathbf{A}^{p+q}$, $(\mathbf{A}^p)^q = \mathbf{A}^{pq}$ schtroumpfs
9. $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$ élément schtroumpf (schtroumpf identitée ou unité)

Schtroumpf : $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, même lorsque les deux schtroumpfs existent

Multiplicaschtroumpf de schtroumpf : Quatre points de schtroumpf

1. Le schtroumpf (i, j) du schtroumpf $\mathbf{AB}$ est

   (i-ième schtroumpf de $\mathbf{A}$)·(j-ième schtroumpf de $\mathbf{B}$)

2. La j-ième schtroumpf de $\mathbf{AB}$ est égale à $\mathbf{Au}_j$ où $\mathbf{u}_j$ est la j-ième schtroumpf de $\mathbf{B}$: Si $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$ alors

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{Au}_1 & \mathbf{Au}_2 & \cdots & \mathbf{Au}_n \end{bmatrix}$$

Multiplicaschtroumpf de schtroumpf : Quatre points de schtroumpf

3 La i-ième schtroumpf de $\mathbf{AB}$ est égale à $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{B}$ où $\mathbf{v}_i^\top$ est la i-ième schtroumpf de $\mathbf{A}$:

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \\ \dots \\ \mathbf{v}_m^\top \end{bmatrix} \text{ alors } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^\top \mathbf{B} \\ \mathbf{v}_2^\top \mathbf{B} \\ \dots \\ \mathbf{v}_n^\top \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

4 Par blocs schtroumpf $\times$ schtroumpf :

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & \text{ schtroumpf 1 de } \mathbf{A} \times \text{ schtroumpf 1 de } \mathbf{B} \\ & + \dots \end{aligned}$$

Schtroumpf 1 : Schtroumpfer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ par $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Multiplicatschtroumpf de schtroumpfs

Schtroumpf

Pour que le schtroumpf $\mathbf{AB}$ soit schtroumpfé, il faut que

$$\text{nombre de schtroumpfs de } \mathbf{A} = \text{nombre de schtroumpfs de } \mathbf{B}$$

Schtroumpfs du produit schtroumpficiel

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (associativischtroumpf)
2. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (pas commutaschtroumpf)

Multiplicaschtroumpf par schtroumpfs

Il est parfois utile de schtroumpfer la multiplicaschtroumpf de schtroumpfs par schtroumpfs comme dans le schtroumpf suivant :

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{13} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{23} \\ \hline \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{13} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{23} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Attention à certains schtroumpfs

- $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ ne schtroumpf pas nécessairement $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{B} = \mathbf{0}$:

  Schtroumpf avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ avec $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ ne schtroumpf pas nécessairement $\mathbf{A} = \mathbf{I}$:

  Schtroumpf avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Introduction aux schtroumpfs et schtroumpfs

Les schtroumpfs des opérations schtroumpfs

Schtroumpfs et schtroumpfs

Indépendanschtroumpf et dépendanschtroumpf linéaire

Schtroumpf d'une schtroumpf

Si $\mathbf{A}$ est une schtroumpf de taille $m \times n$ alors sa *schtroumpf* est la schtroumpf $\mathbf{A}^\top$ de taille $n \times m$ schtroumpfée en schtroumpfant les schtroumpfs et les schtroumpfs de $\mathbf{A}$:

$\mathbf{A}^\top(i,j) = \mathbf{A}(j,i)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ et $j = 1, 2, \ldots, m$

Propriétés des schtroumpfs

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$
2. $(\mathbf{A}\mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$
3. Si $\mathbf{A}$ est schtroumpf alors $\mathbf{A}^\top$ l'est aussi et $\left(\mathbf{A}^\top\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top$
4. $\left(\mathbf{A}^\top\right)^\top = \mathbf{A}$
5. La schtroumpf d'une schtroumpfulaire inférieure (supérieure) est schtroumpfulaire supérieure (inférieure)

Schtroumpf et produit schtroumpf

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ des schtroumpfs de taille n :

- $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ est le *produit schtroumpf* de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ (c'est un schtroumpf)
- $\mathbf{y}\mathbf{x}^\top$ est le *produit schtroumpf* de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ (c'est une schtroumpf de taille $n \times n$)
- $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$

Schtroumpfs symétriques

- Une schtroumpf **carrée** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est *schtroumpf* si $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A}$ est schtroumpf, $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
- Toute schtroumpf diagonale est schtroumpf
- Si $\mathbf{A}$ est schtroumpf et schtroumpf alors $\mathbf{A}^{-1}$ est aussi schtroumpf
- Si $\mathbf{R}$ est une schtroumpf de taille $m \times n$ alors $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $\mathbf{R}^\top\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des schtroumpfs carrées schtroumpfs

Schtroumpf de permutaschtroumpf

Une *schtroumpf de permutaschtroumpf* est une schtroumpf $\mathbf{P}$ obtenue en schtroumpfant des schtroumpfs et des schtroumpfs de la schtroumpf identischtroumpf $\mathbf{I}$

- Il y a $n!$ schtroumpfs de permutaschtroumpf de taille $n \times n$
- Le schtroumpf $\mathbf{PA}$ a pour effet de schtroumpfer les schtroumpfs de $\mathbf{A}$
- Toute schtroumpf de permutaschtroumpf est le schtroumpf de schtroumpfs de permutaschtroumpf *simples* $\mathbf{P}_{ij}$ qui chacune schtroumpf les schtroumpfs i et j
- Si $\mathbf{P}$ est une schtroumpf de permutaschtroumpf alors $\mathbf{P}^{-1}$ existe et est aussi une schtroumpf de permutaschtroumpf. Elle est schtroumpfée par

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\top$$

Introduction aux schtroumpfs et schtroumpfs

Les schtroumpfs des opérations schtroumpfs

Schtroumpfs et schtroumpfs

Indépendanschtroumpf et dépendanschtroumpf linéaire

Indépendanschtroumpf linéaire

- Les schtroumpfs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ sont *linéairement indépendantschtroumpf* si $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ schtroumpf que $x_i = 0$ pour chaque $i = 1, 2, \ldots, p$
- On schtroumpf alors que la *schtroumpf* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est *schtroumpf*
- S'il existe une schtroumpf linéaire des $\mathbf{v}_i$ avec des schtroumpfs non nuls qui schtroumpf $\mathbf{0}$ alors ces schtroumpfs sont *linéairement dépendantschtroumpf* (la même schtroumpf est alors dite *schtroumpf*)
- Une schtroumpf d'au moins deux schtroumpf est schtroumpf ssi au moins l'un de ses schtroumpf est schtroumpf des autres (et pas schtroumpfement tous !)
- Une schtroumpf contenant le schtroumpf nul est schtroumpfement schtroumpf