2. Séries de Taylor

MTH1101

C. Audet, G. Jomphe, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

A2022

v3

Plan

1. Séries entières

2. Développement de Taylor

3. Convergence

4. Techniques

Séries entières

Soit $x \in \mathbb{R}$ et f une fonction. Une série entière est de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots = f(x)$$

(la définition de f n'est pas nécessaire pour les séries entières)

On peut aussi l'écrire comme centrée en $a \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots$$

Les coefficients b_n et c_n peuvent dépendre de n

Attention : Les puissances de x doivent être ≥ 0 :

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$ n'est pas entière

Rayon de convergence d'une série entière

Pour toute série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, il existe un rayon de convergence $R \geq 0$ tel que

- La série converge pour tout $x \in]a-R; a+R[$
- La série diverge pour tout x tel que $|x-a| > R$
- La série peut converger ou diverger pour $x = a \pm R$

Remarques :

- Si $R = 0$, la série converge uniquement pour $x = a$
- Si $R = \infty$, la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$
- L'intervalle de convergence correspond aux valeurs de x permettant d'exprimer $f(x)$ comme la série entière

Exemple : Pour la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x)$, $R = 1$ et l'intervalle de convergence est $]-1; 1[$

Convergence d'une série entière : Test de d'Alembert

Soit la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ et $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

On sait que

- Si $L < 1$: La série converge, et donc que $x \in]a - R; a + R[$
- Si $L > 1$: La série diverge et donc $|x - a| > R$
- Si $L = 1$: On ne peut rien dire

Ainsi, on peut en déduire que

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Convergence d'une série entière : Test de Cauchy

Soit la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ et $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

- Si $L < 1$: La série converge, et donc $x \in]a-R; a+R[$
- Si $L > 1$: La série diverge et donc $|x-a| > R$
- Si $L = 1$: On ne peut rien dire

On peut en déduire que

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Intégration et dérivation d'une série entière

Soit la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Sous certaines hypothèses, on aura

- $\dfrac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$
- $\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n dx$

Le rayon de convergence ne change pas mais les extrémités de l'intervalle de convergence peuvent changer

1. Séries entières

2. Développement de Taylor

3. Convergence

4. Techniques

Polynômes

- Forme générale d'un polynôme en $(x-a)$ de degré n :

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n$$

- Peut se réécrire sous la forme équivalente

$$P_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$

- $a, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des constantes

Formule de Taylor avec reste intégral

- Soit f une fonction telle que ses dérivées $(n+1)$ièmes existent et sont continues sur $[a;x]$
- Le développement de Taylor de f autour de a est

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x)$$

- Reste intégral de Laplace d'ordre n :

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt$$

- Pour $n = 1$: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt$

Développement de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x)$$

- $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$
- $P_n(x)$ est le polynôme de Taylor
- Développement de Taylor de f autour du point a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

- $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$ et $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$

Développement de MacLaurin

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x)$$

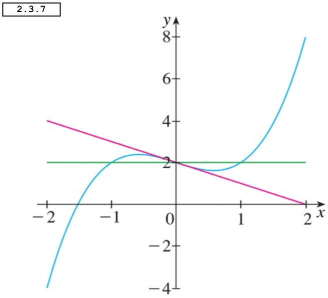
Le développement de MacLaurin est le développement de Taylor avec $a = 0$:

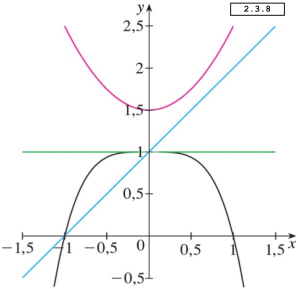
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Interprétation graphique

Voir exercices 2.3.7 et 2.3.8 p.78 :





Approximation d'une fonction par un polynôme

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x)$$

- On peut approximer $f(x)$ par le polynôme suivant d'ordre n :

$$f(x) \simeq P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

- Erreur d'approximation :

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| \leq \text{ précision exigée}$$

- $P_n(x)$ convergera vers $f(x)$ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$$

Majoration du reste

- Pour obtenir la valeur de $f(x)$, avec une précision donnée, on cherche un majorant de $R_n(x)$ et une valeur de n telle que ce majorant soit inférieur à la précision exigée
- Il suffit ensuite d'évaluer $P_n(x)$ pour obtenir la valeur approximative de $f(x)$
- Un **majorant** est :

$$|R_n(x)| = \left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt \right| = |f(x) - P_n(x)|$$

$$\leq \left| f^{(n+1)}(c) \right| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec $c \in [a;x]$ tel que $|f^{(n+1)}(c)| \geq |f^{(n+1)}(t)| \quad \forall t \in [a;x]$

Exemple 1

1. Calculer le développement en série de Taylor de la fonction $f(x) = e^x$ autour du point $a = 0$
2. Pour quelles valeurs de x ce développement est-il valide ?
3. Sachant que $x \in [0; 1]$, donner un majorant du reste $|R_n(x)|$
4. Quel devrait être le degré n minimum du polynôme qui assure que $|f(x) - P_n(x)| \leq 0.01$?
5. Donner une approximation de $e^{\frac{1}{2}}$ avec une précision d'au moins 0.01

Exemple 2

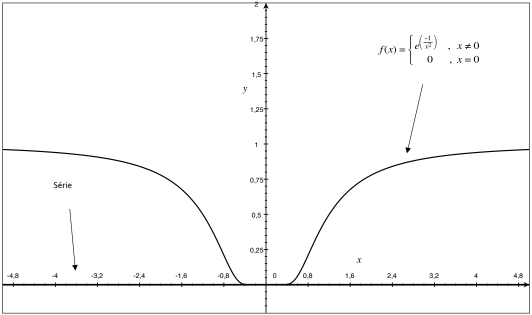
1. Calculer le développement en série de Taylor de la fonction $f(x) = (1+x)^p$ autour de $a = 0$, avec $p \in \mathbb{N}$

2. Qu'aurai-t-on pour $p = -1$?

Convergence non obligatoire vers $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-1/x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

- Toutes les dérivées de $f(x)$ sont nulles en 0
- Le polynômome de Taylor de $f(x)$ autour de 0 est nul
- Mais $P_n(x)$ ne converge pas vers $f(x)$ pour toutes les valeurs de $x \neq 0$:



Exemple 3

Montrer que les séries suivantes sont valides pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Techniques

- D'autres techniques que la formule de Taylor existent pour exprimer une fonction sous la forme d'une série de Taylor
- Il suffit de connaître le développement en série de Taylor de quelques fonctions de base
- Puis utiliser des techniques comme la substitution, la dérivation, et l'intégration

Technique de substitution

- Soient f et g des fonctions dont les séries de Taylor convergent sur les intervalles I_f et I_g
- Alors la série de Taylor de la composition $h(x) = f(g(x))$ peut être obtenue en substituant la série de Taylor de g dans celle de f, puis en regroupant les termes
- La série ainsi obtenue convergera vers $h(x)$ pour tous les points x tels que $x \in I_g$ et $g(x) \in I_f$

Technique de substitution : Exemples

- **Exemple 4 :** En considérant $g(x) = x^2$ et $f(x) = e^x$, trouver le développement de Taylor de $h(x) = f(g(x)) = e^{x^2}$ autour de 0
- **Exemple 5 :** Trouver le développement de Taylor de $e^{\cos x}$ autour de 0. Commencer par donner le développement de $\cos x$ autour de 0

Technique de dérivation

- Cette technique consiste à **dériver** chacun des termes de la série associée à une fonction pour obtenir celle recherchée
- **Exemple 6 :** Trouver la série de Taylor de $\cos x$ autour de 0 en sachant que la série de Taylor de $\sin x$ autour de 0 est

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Technique d'intégration

- Cette technique consiste à **intégrer** chacun des termes de la série associée à une fonction pour obtenir celle recherchée
- **Exemple 7 :** Trouver la série de Taylor de $\arctan x$ autour de 0 en sachant que la série de Taylor de $\frac{1}{1+x^2}$ autour de 0 est

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$