4. Fonctions de plusieurs variables réelles

MTH1101

C. Audet, G. Jomphe, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

A2022

v5

Plan

1. Définitions

2. Limite

3. Continuité

Fonction de deux variables

- Une variable z est une fonction des deux variables x et y si pour chaque couple (x, y) il correspond au plus une valeur de z
- On écrit

$$z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto z$$

- Ou avec la notation $z = f(x, y)$:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

- On parle alors de la fonction f
- La variable z s'appelle la variable dépendante et x et y s'appellent les variables indépendantes

Représentation

On peut représenter une fonction de deux variables de plusieurs façons :

- Par une formule : $P(T,V) = \dfrac{n\,R\,T}{V}$

$$\text{où} \quad \begin{cases} P \;:\; \text{Pression} \\ T \;:\; \text{Température} \\ V \;:\; \text{Volume} \\ n \;:\; \text{Nombres de moles} \\ R \;:\; \text{Constante des gaz } (0.082) \end{cases}$$

- Par un tableau : Tableau `Excel` dans lequel on inscrit la température d'une plaque
- Par un graphique : Carte météorologique, courbe : isotherme, isohypse (joignant des points d'égale altitude), etc.

Domaine d'une fonction

- Le domaine d'une fonction $z = f(x, y)$, noté D_f, est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la fonction est définie sur $\mathbb{R}$. C'est-à-dire :

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \text{ est définie sur } \mathbb{R}\right\}$$

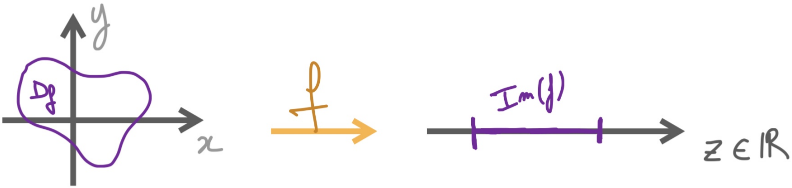
- **Exemple 1 :** Donner le domaine de la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

Image d'une fonction

- L'image d'une fonction $z = f(x,y)$, notée $Im(f)$, est l'ensemble de toutes les valeurs que la fonction f peut prendre

$$Im(f) = \{f(x,y) \in \mathbb{R} \text{ avec } (x,y) \in D_f\}$$



- **Exemple 2 :** Donner l'image de la fonction

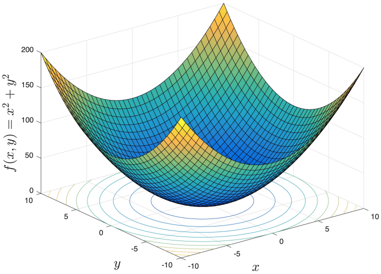
$$f(x,y) = \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Graphe d'une fonction

- Le graphe d'une fonction $z = f(x,y)$, noté $Gr(f)$, est l'ensemble de tous les points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x,y)$:

$$Gr(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } z = f(x,y)\right\}$$

- En général, le graphe d'une fonction de deux variables est une surface dans un espace à trois dimensions



Section transversale d'une fonction

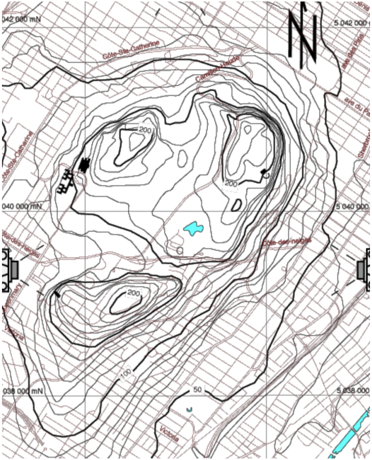
- En coupant le graphe d'une fonction $z = f(x, y)$ par un plan perpendiculaire à l'un des axes de coordonnées x ou y, on obtient une courbe d'intersection

- Cette courbe peut être obtenue en fixant une variable dans $f(x, y)$ et en laissant l'autre variable libre

- À l'aide de plusieurs sections transversales, il est possible de reconstituer le graphe de f

- **Exemple 3 :** Tracer la surface dont l'équation est $z = x^2 + y^2$ à l'aide de sections transversales

Ensembles de niveau : Exemple



Situation géographique : Le mont Royal est une colline qui domine la ville de Montréal, au Québec. Il s'agit de l'une des dix collines montérégiennes situées dans le sud-ouest de la province. La montagne possède trois sommets ou collines : la Grosse Montagne ou colline Mont-Royal (234 mètres), l'Outremont, jadis sous le régime français appelée Pain de Sucre (211 mètres) et la Petite Montagne ou mont Westmount (201 mètres)

Ensembles de niveau

- Les ensembles de niveau d'une fonction $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, notés E_c, sont définis par

  $$E_c = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, ..., x_n) = c\} \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

- Si $n = 2$ (fonction de deux variables), les ensembles de niveau correspondent à des courbes de niveau dans le plan (x, y)
- Si $n = 3$ (fonction de trois variables), les ensembles de niveau correspondent à des surfaces de niveau dans l'espace
- Deux ensembles de niveau différents (pour deux valeurs de c différentes) ne se rencontrent jamais car cela signifierait qu'en leur(s) point(s) d'intersection, la fonction prendrait plus d'une valeur

Courbes de niveau usuelles

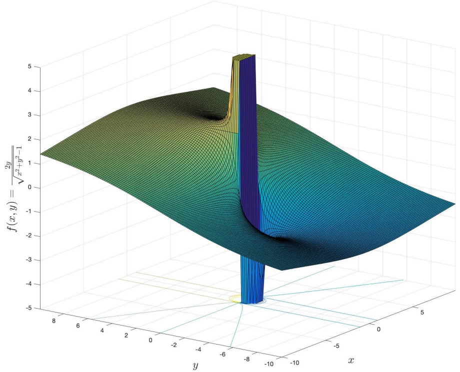
- Ellipse : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
- Cercle : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
- Hyperbole : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
- Parabole : $y - y_0 = a(x - x_0)^2$

Exemple 4

Soit la fonction $f(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

a) Donner le domaine de la fonction et dessiner ce domaine

b) Tracer sur un même graphique les courbes de niveau de cette fonction pour $c \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$



ex4.m

```
[X,Y] = meshgrid(-10:0.15:10,-10:0.15:10);
Z=max(-5,min(5,2.*Y ./ sqrt(max(X.^2+Y.^2-1,0))));
surfc(X,Y,Z);
```

Notation vectorielle

- Le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, noté

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n]^\top = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- Une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ se note donc

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Fonctions linéaires et affines

- La fonction f est dite linéaire en $x_1, x_2, ..., x_n$ si elle est de la forme
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) &= c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ &= f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \end{aligned}$$
avec $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$
- Propriétés :
  - $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$
  - $f(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) + \ldots \alpha_n f(\mathbf{v}_n)$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ des constantes et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$
- f est dite linéaire (affine) si elle est de la forme
$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + a$$
avec $a \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
- Une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine

Fonctions linéaires et matrices

- Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- La multiplication de A par $\mathbf{x}$ donne un vecteur de $\mathbb{R}^m$:

$$A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$$

- On peut donc voir A comme une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \end{aligned}$$

- Avec $A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ a_2^\top \\ \vdots \\ a_m^\top \end{bmatrix}$ on aura $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1^\top\mathbf{x} \\ a_2^\top\mathbf{x} \\ \vdots \\ a_m^\top\mathbf{x} \end{bmatrix}$ où chaque composante correspond à une fonction linéaire

Exemples de fonctions linéaires et non-linéaires

- Exemples de fonctions linéaires :

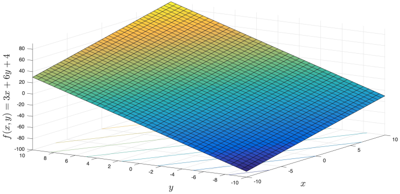
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 3x_1 + 6x_2 + 4 \qquad \text{(affine)} \\ f(x, y) &= x + y \end{aligned}$$

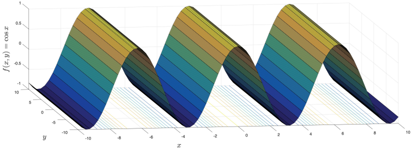
- Exemples de fonction non-linéaires :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 3x_1^2 + 6x_2 + 4 \\ f(x, y) &= \sin(x) + xy \\ f(x) &= x^2 + \cos(x) \end{aligned}$$

Ensembles de niveau

- Les courbes (surfaces) de niveau associées à des fonctions affines de deux variables (trois variables) sont des droites (plans) parallèles
- Par contre, l'inverse n'est pas nécessairement vrai
- Par exemple, les courbes de niveau de la fonction $f(x,y) = \cos(x)$ sont des droites parallèles à l'axe des y dans un espace à trois dimensions. Et pourtant la fonction n'est pas linéaire





Linéarisation

- Il est possible de linéariser une fonction non-linéaire autour d'un point
- Pour cela, il suffit de remplacer les termes non-linéaires par leurs polynôme de Taylor de degré un, autour de ce point
- Ainsi, si nous linéarisons la fonction $f(x, y) = \sin(y)$, autour de l'origine, nous obtiendrons $f(x, y) \simeq y$
- Lorsque les termes non linéaires dépendent de plusieurs variables, il faudra utiliser les polynômes de Taylor de fonctions de plusieurs variables. Ce qui sera étudié dans une leçon ultérieure

1. Définitions

2. Limite

3. Continuité

Introduction

La notion mathématique de limite a été introduite en 1735 par le mathématicien anglais Benjamin Robins comme ce vers quoi tendent, sans jamais l'atteindre, certains rapports de quantités variables. Précisée en 1800 par le mathématicien et physicien allemand Carl Friedrich Gauss pour les suites de nombres réels, puis en 1823 par le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy, qui la met à la base du calcul infinitésimal et introduit la notation $\lim$ *pour "limite", elle reçut une définition précise et générale grâce aux notions d'espace topologique, donnée par le mathématicien allemand Felix Hausdorff en 1914, et de filtre, introduite en 1937 par le mathématicien français Henri Cartan*

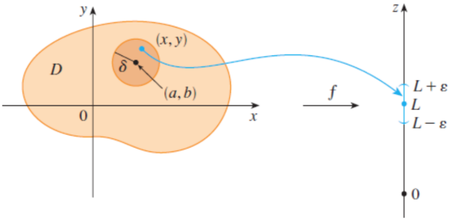
www.universalis-edu.com/encyclopedie/limite

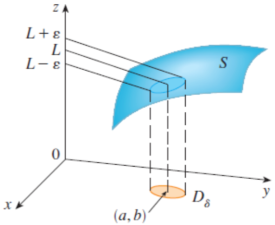
Définition

Considérons la fonction $f(x, y)$ définie sur le domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$, et (a, b) un point $\in D$ ou à sa frontière

- On dit que L est la limite (finie) de la fonction $f(x, y)$ au point (a, b) si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si
$$0 < ||(x, y) - (a, b)|| < \delta$$
alors
$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$
- On note $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$
- Notons que $||(x, y) - (a, b)|| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$
- Cela signifie que $|f(x, y) - L|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut en prenant le point (x, y) suffisamment près du point (a, b)

Illustration du concept de limite





Remarques

- Si la limite existe, alors la fonction $f(x, y)$ doit tendre vers la même limite quelle que soit la manière selon laquelle (x, y) s'approche de (a, b)
- Si la limite existe et est telle que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

alors L est unique

Méthodes pour évaluer une limite

- Par l'utilisation directe de la définition
- Par la méthode du "sandwich"
- Par la méthode des chemins : Pour montrer que la fonction f n'a pas de limite en (a, b), il suffit de trouver deux chemins différents menant vers (a, b), qui donnent deux limites différentes
- En effectuant un changement de variables

Exemples

5 Évaluer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

6 Évaluer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

7 Évaluer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

8 Évaluer $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x+y+z)}{x+y+z}$

1. Définitions

2. Limite

3. Continuité

Définition

- On dit que $f(x, y)$ est continue au point (a, b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

- C'est-à-dire que la limite existe et est égale à $f(a, b)$
- Géométriquement, cela signifie qu'il n'y a pas de saut de la fonction au point (a, b)
- Une fonction continue en tout point de son domaine est dite continue

Exemples

9 Est-ce que la fonction suivante est continue au point $(0,0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

10 En utilisant les coordonnées polaires, montrer que la fonction suivante est continue au point $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriétés des fonctions continues

Soient $f(x,y)$ et $g(x,y)$ deux fonctions continues en (a,b). Alors

P1. $h(x,y) = \alpha_1 \, f(x,y) + \alpha_2 \, g(x,y)$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ est continue en (a,b)

P2. $h(x,y) = f(x,y) \; g(x,y)$ est continue en (a,b)

P3. $h(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ est continue en (a,b) si $g(a,b) \neq 0$

P4. Soit g une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et f une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue au point (a,b) alors la fonction composée $h(x,y) = g(f(x,y))$ est continue en (a,b)

Exemple 11

Soient les deux fonctions :

- $g(t) = e^t$ qui est continue pour tout t
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

  qui est continue en $(0,0)$ (**exemple 10**)

Alors

$$h(x,y) = g(f(x,y)) = \begin{cases} e^{\frac{x^4 y}{x^4+y^4}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \underbrace{e^0}_{=1} & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x^4 y}{x^4+y^4}} = h(0,0) = 1$$