L’enseignement de la théorie des graphes à l’aide d’intrigues policières

Alain Hertz
Professeur à l’École Polytechnique de Montréal

Résumé

Apprendre en s'amusant, n'est-ce pas ce que nous aimerions tous pouvoir faire? Le livre intitulé « L'Agrapheur » offre une telle occasion puisqu'il propose une approche ludique de l'apprentissage de la théorie des graphes sous forme d'intrigues policières. Comme aucune connaissance préalable n'est requise pour comprendre les raisonnements mathématiques qu'il contient, il est facile d'accès pour tous. Il s'agit donc d'un magnifique outil de vulgarisation pour aborder cette science encore méconnue. Il s'adresse aussi bien aux élèves de niveau secondaire ou collégial qui aiment résoudre des énigmes qu’aux enseignants qui désirent faire découvrir la théorie des graphes à leurs élèves.

I. La phobie des mathématiques

Les mathématiques font peur à beaucoup élèves, il n’y a pas de doute là-dessus. Certains en viennent même à détester cette matière qui est pourtant l’une des plus belles conquêtes intellectuelles de l’espèce humaine. Plusieurs raisons peuvent expliquer cette phobie des mathématiques, comme la crainte de ne pas comprendre ou la nature trop abstraite de nombreux concepts qui ne semblent avoir aucun lien avec une quelconque application pratique. Le manque de pédagogie de certains enseignants peut aussi largement contribuer à réduire l’intérêt des élèves pour cette science qui est pourtant indispensable pour bien comprendre la société, le monde rationnel dans lequel nous vivons. Ainsi, l’apprentissage des mathématiques se réduit parfois à des exercices reproductifs et les élèves ont alors l’impression que l’enseignement vise à leur apprendre à utiliser des mécanismes sans qu’ils doivent nécessairement les comprendre.

Ce constat ne date pas d’hier et de nombreux enseignants investissent depuis longtemps beaucoup d’énergie, d’effort et de temps pour rendre leurs cours de mathématiques plus attractifs. Je ne pense pas qu’il existe une recette miracle qui agira comme un élixir ayant le pouvoir de transformer les mathématiques en la matière la plus captivante du cursus scolaire. Il est cependant indéniable qu’on apprend mieux en s’amusant, lorsque l’enseignement comporte une composante ludique qui permet de retenir l’attention des élèves.

II. Mathématiques et intrigues policières

Les énigmes policières captivent généralement le grand public, d’où l’idée de présenter des concepts mathématiques, a priori abstraits, en les intégrant dans une enquête de police. Les producteurs de la série télévisée *Numb3rs* [1] (diffusée au Québec en français sur Ztélé et en anglais sur Global TV) ont su tirer profit de cette idée. Depuis 2005, cette série a attiré de nombreux spectateurs en leur contant l’histoire d’un agent du FBI qui trouve une aide précieuse auprès de son frère, mathématicien de génie, pour résoudre les enquêtes les plus délicates. Les nombres et les mathématiques en général sont utilisés pour analyser les crimes, révéler des tendances et tenter de prévoir des comportements. Les scénaristes ont fait appel à de vrais mathématiciens pour écrire leur scénario, de sorte que l'introduction des mathématiques dans une affaire relève du plausible.

Mais il n’y a pas qu’à la télé que les mathématiques sont rendues plus séduisantes à l’aide d’intrigues policières. Ainsi, par exemple, Andrew Granville, professeur de mathématique à l’Université de Montréal, a écrit une pièce de théâtre intitulée *MSI* (*Math Sciences Investigation): Anatomy of Integers and*

Permutations (Enquête au cœur des mathématiques : Anatomie des intégrales et permutations) dont la première a eu lieu en décembre 2009 [2]. *MSI* met en scène des personnages inspirés de célèbres mathématiciens qui se trouvent projetés au cœur d'une énigme policière. D'après Andrew Granville, le public aime regarder ou écouter ce qu'il ne comprend pas toujours parfaitement, pour peu que cela lui soit présenté de manière divertissante. Sa pièce de théâtre a pour but de rendre les mathématiques accessibles à un large public.

La littérature policière n'est pas en reste. Plusieurs enseignants en mathématiques ont coiffé la casquette de l'écrivain pour rendre cette science plus attractive. Ainsi, par exemple, avec son livre intitulé « Élémentaire mon cher Watson » [3], Colin Bruce présente douze enquêtes policières résolues grâce à la logique, aux mathématiques et aux probabilités. Pour sa part, Didier Müller propose un petit cours de cryptographie classique sous la forme d'un roman policier intitulé « Les 9 couronnes » [4]. J'ai moi-même écrit un roman policier relatant les enquêtes d'un inspecteur de police que tout le monde surnomme l'*Agrapheur* [5]. Ce surnom, mon inspecteur le doit à ses méthodes aussi efficaces que peu conventionnelles. Il dispose en effet d'un outil redoutable pour 'agrafer' les coupables des affaires criminelles : la théorie des graphes.

En résumé, que ce soit par l'intermédiaire de l'audio-visuel, de l'art dramatique ou de la littérature, toutes les réalisations susmentionnées vont dans le même sens, à savoir d'offrir une approche ludique pour l'enseignement des mathématiques. Voilà peut-être de quoi réconcilier un large public avec une science trop souvent mal aimée.

III. Exemple d'énigme mathématico-policière.

La théorie des graphes est la branche des mathématiques que l'*Agrapheur* utilise pour désigner les coupables dans des affaires criminelles. Les bases de cette théorie sont en général enseignées en fin de secondaire ou au Cegep. Aucune connaissance mathématique n'est nécessaire pour dessiner un graphe. Il suffit de prendre une feuille de papier, de choisir quelques emplacements en les marquant avec de petits cercles, et finalement d'ajouter quelques liaisons entre certaines paires d'emplacements. Les petits cercles sont appelés des *sommets* alors que les liaisons sont appelées des *arêtes*.

Supposons un instant qu'un enseignant désire bâtir un cours portant sur les graphes *bipartis*. Ces graphes ont la particularité qu'il existe une partition de leurs sommets en deux ensembles disjoints tel que chaque arête relie un sommet du premier ensemble à un sommet du deuxième ensemble de la partition. L'enseignant peut vouloir démontrer la propriété suivante.

> **Propriété**. *Étant donné un triplet de sommets choisi au hasard dans un graphe biparti, il existe nécessairement au moins deux de ces trois sommets qui ne sont pas reliés par une arête.*

La preuve de la validité de cette propriété peut par exemple être donnée en considérant un triplet quelconque {A,B,C} de sommets dans un graphe *biparti* et en supposant que des arêtes relient le sommet A aux sommets B et C. Il reste alors à démontrer qu'il n'existe pas d'arête reliant B à C. Puisque chaque arête relie un sommet d'un ensemble de la partition à un sommet de l'autre l'ensemble, les arêtes reliant A à B et C nous indiquent que A fait partie de l'un des deux ensembles de la partition alors que B et C font partie de l'autre ensemble. Ainsi, puisque B et C font partie du même ensemble de la partition, ils ne peuvent pas être reliés par une arête.

Le concept de graphe *biparti* ainsi que la propriété démontrée ci-dessus peuvent paraître bien abstraits pour la majorité des élèves. Il me semble bien plus aisé d'enseigner ces notions en les présentant dans le cadre d'une intrigue policière L'énigme qui suit permet d'illustrer mes propos.

Une énigme. Le directeur d'une prison décide d'organiser deux ateliers qui de dérouleront en parallèle et demande à sept détenus de participer à l'atelier de leur choix. Le lendemain, chacun des animateurs vient voir le directeur pour lui dire que seuls trois détenus ont pris part à leur atelier, ce qui signifie que l'un des sept détenus n'a participé à aucun des deux ateliers. Malheureusement, les animateurs n'ont pas constitué de liste de présence et, comme ils ne sont pas physionomistes, ils se sentent incapables d'indiquer avec certitude quels sont les détenus qui ont pris part à l'activité qu'ils avaient la charge d'animer.

Pour déterminer le détenu qui n'a participé à aucun des deux ateliers, le directeur décide d'interroger les sept détenus. De crainte de passer pour des délateurs, ceux-ci refusent d'indiquer les noms des camarades qui se trouvaient dans leur atelier, mais ils acceptent de donner chacun deux noms de détenus qui n'ont pas participé au même atelier qu'eux. Les témoignages sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	n'était pas dans le même atelier que	
Alain	Bernard	Didier
Bernard	Claude	François
Claude	Alain	Georges
Didier	Edgar	François
Edgar	Claude	Georges
François	Bernard	Georges
Georges	Alain	Edgar

Tableau 1. Résumé des témoignages

En analysant ce tableau, le directeur réussit à déterminer le coupable. Et vous, êtes-vous capable d'en faire autant ?

La solution de l'énigme. La théorie des graphes permet de résoudre cette énigme sans trop de difficulté. Construisons pour cela un graphe dont les sommets sont les détenus et relions deux détenus par une arête si au moins l'un des deux dit ne pas avoir vu l'autre dans son atelier. Le graphe représentant les témoignages est représenté ci-dessous.

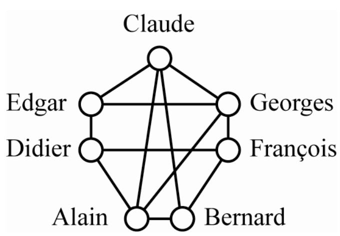


Figure 1. Le graphe des témoignages

Si les sept détenus avaient participé aux ateliers, ce graphe serait *biparti*. En effet, on pourrait considérer la partition des détenus en deux groupes selon l'atelier auquel ils ont pris part, ce qui signifierait que chaque arête relierait un détenu du premier groupe à un détenu du deuxième groupe puisque chaque témoignage indique que deux individus ne se sont pas rencontrés.

Le triangle reliant Alain, Bernard et Claude montre cependant clairement que le graphe de la Figure 1 n'est pas *biparti*. En effet, ces trois détenus prétendent ne pas s'être rencontrés dans les ateliers, ce qui ne serait possible que si trois (et non deux) ateliers avaient été organisés. En d'autres termes, étant donné un triplet de détenus, il doit nécessairement exister au moins deux parmi eux qui ne sont pas reliés par une arête. Il existe donc nécessairement un menteur parmi Alain, Bernard et Claude. La même conclusion peut être tirée du triangle reliant Claude, Edgar et Georges. Étant donné que Claude est le seul détenu qui fait partie de ces deux triplets, il est la personne recherchée. Lorsqu'on ôte Claude du graphe, il ne reste que 6 détenus qui peuvent cette fois bel et bien être répartis en deux groupes de trois personnes représentés ci-dessous par les couleurs noires et blanches. On remarque que chaque arête relie un sommet noir à un sommet blanc, c'est-à-dire un détenu du premier groupe de la partition à un détenu du deuxième groupe. Il s'agit donc bien d'un graphe *biparti*.

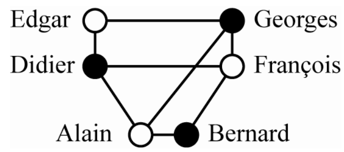
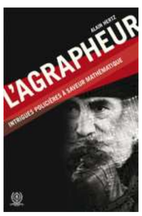


Figure 2. Après avoir ôté Claude du graphe, on obtient un graphe *biparti*.

Cette énigme permet d'illustrer le concept de graphe *biparti* ainsi que la propriété susmentionnée. Elle permet de donner un exemple concret d'une notion abstraite. Des exemples similaires seront donnés dans le cadre d'un atelier que j'animerai au 45e congrès de l'APSQ le 5 novembre 2010.

IV. Conclusion



Bien d'autres concepts de la théorie des graphes peuvent être illustrés à l'aide d'intrigues policières. C'est en fait exactement ce qui est proposé dans l'ouvrage *l'Agrapheur* qui offre une véritable introduction à la théorie des graphes puisque toutes les notions de base y sont traitées. Le livre est découpé en neuf chapitres pouvant être lus indépendamment les uns des autres. Chaque chapitre porte sur un thème différent et l'enseignant qui désire présenter un concept particulier de la théorie des graphes peut donc choisir le chapitre correspondant, le faire lire à ses élèves et leur demander, par exemple, de jouer l'histoire sous la forme d'une pièce de théâtre. Il peut aussi demander à un autre élève d'écrire au tableau les raisonnements mathématiques de *l'Agrapheur* et de dessiner les graphes apparaissant dans l'histoire. L'enseignant peut ensuite poursuivre son cours en donnant des définitions plus formelles qui seront assimilées plus facilement par les étudiants grâce à l'aventure qu'ils viennent de vivre de manière théâtrale et aux notes inscrites sur le tableau.

Les enseignants qui le désirent peuvent se prévaloir de notes pédagogiques d'accompagnement [6] leur permettant d'intégrer les intrigues du livre à leur matière sous la forme d'exercices ludiques. Chaque chapitre du livre est accompagné d'explications et références supplémentaires sur des aspects plus précis de la théorie des graphes permettant à l'enseignant de présenter à ses étudiants les fondements théoriques des intrigues policières.

Il n'y a donc plus matière à hésiter. Venez découvrir *l'Agrapheur*, proposez-le à vos élèves, et vous constaterez qu'il est réellement possible d'enseigner une branche des mathématiques en captivant ses élèves.

Bibliographie

[1] Columbia Broadcasting System (CBS) (page consultée le 2 septembre 2010). Site officiel de la série Numb3rs. Adresse URL : http://www.cbs.com/primetime/numb3rs

[2] Sylvain-Jacques Desjardins. Lumières, rideaux, arithmétique : Andrew Granville met les mathématiques en scène. UdeMNouvelles, Communiqué du 10 décembre 2009.

[3] Colin Bruce. Élémentaire mon cher Watson. Flammarion. Janvier 2002. ISBN : 2-080353-55-1

[4] Didier Müller. Les 9 couronnes. Société jurassienne d'émulation. Juin 2009. ISBN : 2-940043-41-8.

[5] Alain Hertz. L'Agrapheur - intrigues policières à saveur mathématique. Presses Internationales Polytechnique. Mars 2010. ISBN : 978-2-553-01543-4

[6] École Polytechnique de Montréal (page consultée le 2 septembre 2010). Site Web du livre l'Agrapheur. Adresse URL : http://www.polymtl.ca/pub/sites/lagrapheur.